ЧАРЛЬЗ АСТОР БРИСТЕД
CHARLES ASTOR BRISTED

ПЯТЬ ЛЕТ В АНГЛИЙСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
FIVE YEARS IN AN ENGLISH UNIVERSITY

(Избранные главы)

Перевод и примечания Юлии Глек
Оригинал здесь http://www.archive.org/details/fiveyearsinengli00brisuoft

Оглавление

Приложение 1
Задания Математического Трайпоса 1845 г.

Экзамен в Сенат-Хаусе
Среда, 1 янв. 1845 г. 9.00 – 11.30

(N.B. дифференциальное исчисление не использовать.)

1. Если продолжить одну из сторон треугольника, внешний угол больше, чем любой из внутренних противоположных углов.

α. В равных окружностях равные кривые стягиваются равными прямыми линиями.

3. Турецкий ковёр размером 11 футов 6 дюймов на 9 футов 8 дюймов положен на пол комнаты размером 14 футов на 12 футов 6 дюймов. Вычислите, сколько коврового покрытия ещё необходимо для того, чтобы полностью покрыть эту площадь, а также её стоимость при цене 6 шиллингов за квадратный ярд.

β. Сформулируйте и объясните правило для извлечения квадратного корня из алгебраического выражения. Вычислите квадратный корень из $4x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x + 1$.

5. Когда говорят, что одна переменная изменяется точно так же, как другая? Если x изменяется точно так же, как y, при постоянной z, и обратно пропорционально z при постоянной y, тогда, если y и z обе изменяются, x будет изменяться как $\frac{y}{z}$.

Если значения x, y и z одновременно равны соответственно 3, 2 и 1 в предыдущей теореме, определите значение x при y=2 и z=4.

γ. Решите следующие уравнения:

$$\frac{x-1}{x+1} = 1 + \frac{1}{x}$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y = x^2 \\ 3y - x = y^2 \end{array}\right\}$$

$\sqrt{a+x}^{\,+}\sqrt{a-x}^{\,=}\sqrt{b}^{\,/}$

7. Выведите правило перевода числа из одной системы счисления в другую.
В какой системе счисления число 95 будет записано как 137?

δ. Докажите, что $\tan(\theta + \theta') = \frac{\tan\theta + \tan\theta'}{1 - tan\theta\,\tan\theta'}$,
а также что $\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{1}{8} = 4$

9. Если $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, найдите выражение для нахождения площади плоского треугольника через его стороны.

Упростите это выражение для равностороннего треугольника.

ε. Найдите уравнение прямой, которая пересекается с осями x и y соответственно на расстоянии a и в от начала координат. Если оси пересекаются под прямым углом, каким будет угол пересечения прямых $x + y\sqrt{3} = 0$ и $x - y\sqrt{3} = 2$.

11. Исследуйте полярное уравнение конических сечений, обращённых к фокусу.

Если S – фокус, а PSP′– любая фокальная хорда, тогда $\frac{1}{SP} + \frac{1}{SP'} = a$ – постоянная величина.

ζ. Если расстояние между вершиной и фокусом эллипса остаётся неизменным, в то время как большая ось продлевается sine limite (до бесконечности), эллипс в конце концов перейдёт в параболу.

Каков эксцентриситет эллипса, который описывается уравнением $2x^2 + 3y^2 = c^2$?

13. В сферических треугольниках синусы углов пропорциональны синусам противоположных сторон.

η. Площадь сферического треугольника меняется как избыток сумм его углов над двумя прямыми углами.

Даны логарифмы двух последовательных целых чисел p, p+1, исследуйте последовательность для вычисления log (p+2).

Если даны табличные логарифмы двух последовательных чисел значительной величины, найдите Неперовы логарифмы этих же чисел.

θ. Если a, b, c, &c – корни уравнения $x^n + p_1x^{n-1} + p_1x^{n-2} + \ldots = 0$, докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 + \&c = p_1{}^2 - 2p_2$. Отсюда выведите природу корней $x^3 + 4x^2 + 9x + 1 = 0$.

Экзамен в Сенат-Хаусе

Среда, 1 янв. 1845 г. 1.00 – 4.00 дня

(N.B. дифференциальное исчисление не использовать.)

1. Если величины и направления двух сил представлены двумя смежными сторонами параллелограмма, а его диагональ по направлению совпадает с равнодействуюшей, докажите, что она равна ей и по величине.

Однородная балка подвешена к фиксированной точке на двух неравных верёвках за концы. Сравните натяжение каждой верёвки с весом балки.

2. Найдите отношение между P и W на гладкой наклонной поверхности, если P

действует в заданном направлении. В каком направлении должно действовать P, чтобы служить опорой для наибольшего веса? Если W поддерживается верёвкой, параллельной плоскости, которая проходит через фиксированный блок и привязана к грузу W', докажите, что когда W' передвигают, центр тяжести W и W' не станет ни выше, ни ниже.

3. Найдите центр тяжести усечённой пирамиды, ограниченной плоскостью, параллельной основанию.

α. Как измеряется скорость и ускоряющая сила? Сформулируйте второй закон движения.

Тело брошено вертикально вверх со скоростью 3g. В какие моменты времени его высота будет 4g, и какова будет его скорость в эти моменты?

β. Совершенно упругий мяч сталкивается непосредственно с другим в состоянии покоя; определите скорости после столкновения.

Если первоначальное направление движения ударяющего мяча отклонено от линии, соединяющей их центры, на 45°, каким будет угол между направлениями его движения до и после столкновения?

γ. Два неодинаковых груза, соединённые верёвкой, свисают с фиксированного блока. Найдите ускоряющую силу, пренебрегая инерцией блока.

δ. Сформулируйте и докажите десятую лемму Ньютона. Покажите на рисунке случай, когда сила постоянна, и выведите формулу $s = \frac{1}{2}ft^2$.

ε. Когда тела описывают разные окружности с одинаковыми скоростями, силы стремятся к центру окружностей и равны квадратам скоростей, делённым на радиусы окружностей.

Если бы внешние планеты всегда казались неподвижными в геоцентрическом противостоянии, какому закону подчинялись бы силы, если бы орбиты представляли собой окружности в плоскости эклиптики?

ζ. Тело удерживается в коническом сечении силой, направленной к фокусу. Покажите, что скорость на максимальном и минимальном расстоянии относится к скорости в окружности на том же расстоянии, как квадратный корень фокального параметра к квадратному корню в два раза большего или меньшего расстояния.

10. Найдите условия равновесия тела, плавающего в жидкости.

11. Покажите, как сравнить удельную массу двух жидкостей, взвесив одно и то же тело в каждой из них.

12. Объясните действие сифона.

Вода вытекает из сосуда через сифон. Что произойдёт, если атмосферное давление сначала исчезнет, а потом вновь появится, (1) если нижний конец сифона будет погружён в воду, (2) если не будет?

η. Определите главный фокус сферического рефлектора.

При прямом отражении в сферической поверхности, прямоугольник, ограниченный расстояниями конъюгированных фокусов от главного фокуса, является постоянным.

θ. Найдите отклонение от оси пучка света, который преломляется в призме в плоскости, перпендикулярной краю.

Можно ли увидеть сквозь призму объекты, коэффициент преломления которых для средних лучей составляет 1,5, а угол преломления - прямой?

ι. Докажите теорему по оптике, на которой основана конструкция секстанта Хэдли (Hadley). Как найти коллимационную ошибку?

16. Когда Солнце имеет данное северное склонение, покажите, в каких частях Земли оно видно (1) в течение 2-4 часов, (2) в течение 12 часов.

17. Найдите время в данном месте, исходя из наблюдений высоты известной звезды.

18. Объясните причину аберрации и найдите величину и направление изменения, которое она производит в видимом местонахождении звезды.

Почему аберрация заметно не влияет на видимое местонахождение Луны?

Экзамен в Сенат-Хаусе
Четверг, 2 янв. 1845 г. 9.00 – 11.30

1. Определите условия равновесия жёсткого тела, на которое воздействует любая система сил, если оно закреплено в одной точке. Если силы не находятся в равновесии, найдите плоскость, в которой должна быть приложена пара сил, чтобы получить равновесие.

α. Площадь поверхности, описанная плоской кривой, которая вращается вокруг оси в своей собственной плоскости, равна произведению длины кривой на длину траектории её центра тяжести, при условии, что кривая производящая полностью лежит по одну сторону оси. Почему необходимо это последнее условие?

β. Найдите уравнение траектории брошенного тела в вакууме. Определите угол подъёма, под которым должно быть брошено тело, чтобы фокус его траектории лежал в горизонтальной плоскости, проходящей через точку бросания.

4. Докажите, что на центральных орбитах скорость изменяется обратно пропорционально как перпендикуляр к касательной. Отсюда выведите общее уравнение центральных орбит

$$h^2\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p_1^2}\right)=2\int_r^{r^1} Pdr$$

где P – это сила на расстоянии r, а r^1, p^1 – любые два соответствующих значения r и p.

γ. Цилиндрический сосуд, верх и дно которого образуют плоскости, перпендикулярные его оси, содержит упругую жидкость, весом которой можно пренебречь. Если сосуд равномерно вращается вокруг своей оси, найдите давление в любой точке массы жидкости.

6. Вращательное движение жёсткой системы, на которую воздействуют любые силы, вокруг его центра тяжести такое же, как если бы центр тяжести был закреплён, и воздействовали бы такие же силы.

Тяжёлая балка движется вокруг горизонтальной оси, проходящей через один конец. Применив вышеизложенный принцип, определите для любого положения балки давление на ось в направлении, перпендикулярном балке.

7. Покажите, что лучи маленького пучка света после косого отражения в сферической поверхности сходятся к либо расходятся от двух фокальных линий. Почему изображение точки, сформированное призмой в положении минимального отклонения, является более чётким, чем при любом другом положении призмы?

δ. Пучок белого света падает прямо на тонкую выпуклую линзу малой апертуры. Определите положение и радиус наименьшего круга хроматической аберрации.

ε. Найдите выражение тангенциальной возмущающей силы для Солнца и Луны и определите величину отклонения, насколько оно зависит от этой возмущающей силы.

ζ. Определите приблизительно соотношение осей эллиптической орбиты Луны. Каким бы было значение этого соотношения, если бы Луна двигалась по своей орбите с востока на запад?

η. Изложите обычные методы определения широты места наблюдения. Каким образом может быть для этого использован теодолит, ось которого ориентирована на север - юг? Докажите, что ошибка уровня теодолита даст в результате равную ошибку широты, определённой с его помощью.

12. Если полярная ось экваториала немного смещена, определите, какие поправки необходимо внести в его показания.

13. Изложите, как проводятся наблюдения с помощью настенного круга. Как можно определить, что у этого инструмента неверная градуировка?

14. Выведите формулу, позволяющую определить с помощью барометра высоту воздушного шара.

Экзамен в Сенат-Хаусе. Задачи.
Четверг, 2 янв. 1845 г. 1.00 – 4.00 дня

1. Квадраты сторон четырёхугольника больше, чем квадраты его диагоналей, на величину, в четыре раза большую квадрата линии, соединяющей середины диагоналей.

2. Коэффициент x^r в разложении $(1+x)(1 + cx)(1 + c^2x)(1 + c^3x)\ldots$, при неограниченном числе множителей и c меньшем единицы, равен

$$\frac{c\frac{1}{2}^{r(r-1)}}{(1-c)(1-c^2)(1-c^3)\ldots(1-c^r)}$$

3. Найдите в форме, адаптированной к логарифмическому исчислению, расстояние между двумя точками CD, находящимися в плоскости данного основания AB, при том, что дан угол C, противолежащий AB и AD, и угол D, противолежащий AB и BC.

4. Прямые линии, проведенные через вершины треугольника, делят стороны в соотношении a к d, b к e и c к f. Покажите, что отношение площади, ограниченной этими линиями, к площади треугольника равно

$$\frac{(abc-def)^2}{(ab+ae+de)(ac+cd+df)(bc+bf+ef)}$$

5. Четыре точки A, B, C и D на поверхности сферы соединены дугами больших кругов, E и F – середины дуг AC и BD. Докажите, что

cos AB + cos BC + cos CD + cos AD = 4 cos AE cos BF cos FE,

и выведите из этого свойство плоского четырёхугольника из задачи 1.

6. Прямые линии, проведённые под прямыми углами к касательным к параболе в точках, где с ними пересекается данный прямой перпендикуляр к оси, являются в общем случае касательными конфокальной параболы.

7. Мяч, брошенный из любой точки в одну из стен прямоугольной комнаты, ударившись об остальные три стены, возвращается в точку броска, прежде чем упадёт на землю. Покажите, что расстояние из-за скорости броска больше, чем диагональ пола.

8. Два груза последовательно подвешены на южном конце магнитной стрелки; зная моменты грузов и наклон стрелки к горизонту в положениях равновесия, найдите истинное падение.

9. A – закреплённое зеркало секстанта, B – подвижное. Переместите BA, путь луча между зеркалами, в C, так чтобы AC=AB. Пусть зеркало A будет закреплено в C в таком положении, чтобы луч, исходящий из B, мог бы отразиться в той же точке на противоположном лимбе, что и раньше. Если использовать теперь инструмент обычным образом, какой угол следует прибавлять к показаниям?

10. Конус, вершина которого закреплена на дне сосуда с жидкостью, находится в равновесии, когда его наклонная сторона стоит вертикально, а самая нижняя точка основания лишь касается поверхности жидкости. Сравните плотность конуса с плотностью жидкости.

11. Треугольник вписан в коническое сечение. Докажите, что точки, в которых продолженные стороны треугольника пересекаются с касательными в противоположных углах, находятся на одной прямой.

12. Покажите, что спрямление кривой, уравнение которой $(x^2 + y^2)^2 - 4ab(x^2 + y^2) + 4a^2x^2 = 0$, где $(a - 2b)\ (2a - x^2 + y^2) = ab$, зависит от эллиптической функции первого порядка, модуль которой $\sqrt{5} - 2$.

13. Эллипсоид пересевается плоскостью, расстояние от которой до центра имеет постоянное отношение к расстоянию до параллельной касательной плоскости. Покажите, что объём конуса, основание которого является сечением, а вершина – центром эллипсоида, является постоянным.

14. Даны уравнения кривой в пространстве по отношению к трём прямоугольным осям. Найдите длину перпендикуляра из начала координат к касательной в любой точке.

Напр.: $x = a \cos \theta$, $y = a \sin \theta$, $z = \frac{a}{2}\,(e^{\theta} + e^{-\theta})$

Докажите, что если перпендикуляр постоянный, то инволюта лежит на поверхности сферы.

15. Покажите, что $\int_0^\infty \frac{dx}{x}\,(\cos ax - \cos bx) = \log \frac{b}{a}$,

и что $\int_0^\infty \frac{dx}{x} \log \frac{1+2m\cos ax+m^2}{1+2m\cos bx+m^2} = \log(1+m) \log \frac{a^2}{b^2}$ или $\log(1+\frac{1}{m}) \log \frac{a^2}{b^2}$, в зависимости от того, больше или меньше m единицы.

16. Тело P движется по поверхности прямого конуса, ось которого вертикальна и пересекается с горизонтальной плоскостью в точке S. Найдите закон силы для S, по которому тело может удерживаться на кривой, которая является проекцией траектории P на плоскости.

17. В среде, сопротивление которой частично постоянное и частично переменное как целая степень скорости, найдите скорость брошенного тела в любой точке траектории в единицах наклонения траектории к горизонту в этой точке.

18. Околополярная область неба изображается в соответствии с принципом карты Меркатора на секторе круга, дуга которого изображает собой данную параллель склонения, а центр изображает полюс. Найдите радиус дуги, которая изображает любую другую параллель.

19. Свет Солнца преломляется через призму, край которой вертикален. Найдите положение преломляющих поверхностей, так чтобы для данной высоты Солнца отклонение лучей данного цвета было минимальным.

Если z – зенитное расстояние Солнца, i – угол преломления, а x – угол первого падения лучей к горизонту, μ - коэффициент данного цвета, покажите, что минимальное отклонение D описывается уравнениями

$$\sin \frac{D}{2} = \sin z \sin \left(x - \frac{i}{2}\right) : \sin x = \mu \sin \frac{i}{2} \cdot \sqrt{1 + \left(1 - \frac{1}{\mu^2}\right) \cot^2 z}$$

20. Объясните явления гало и паргелия. Найдите наибольшую высоту Солнца, при которой возможно увидеть последнее.

21. Круглый диск, вращающийся вокруг оси, проходящей через его центр

перпендикулярно к его плоскости, которая наклонена к горизонту под данным углом, помещён на гладкую горизонтальную плоскость. Определите его движение.

Когда начальная скорость окружности очень велика по сравнению с той, что требуется в $1''$ для падающего тела, найдите время и величину вертикальных колебаний центра тяжести.

22. Комета, движущаяся из одной данной точки в другую, в каждый момент времени сбрасывает небольшую часть своей массы, которая всегда имеет постоянное отношение (n) к оставшейся массе. Если v – это скорость, с которой сбрасывается каждая частица, a – отклонение направления его движения к вектору радиуса, докажите, что период (t) будет уменьшаться на

$$\frac{3ntv}{fa}\left\{(\varphi - \varphi')\sqrt{ap} \cdot \sin\alpha - (r' - r)\cos\alpha\right\},$$

где φ и φ' - эксцентрические аномалии, r и r' – фокусные расстояния в данных точках, a – среднее расстояние, 2p – фокальный параметр, a f – сила на расстоянии a.

23. Найдите положение маленького прямолинейного магнита, центр которого закреплён, когда действие на отдалённую частицу свободного магнетизма находится в заданном направлении.

24. Волны распространяются вдоль канала равномерной глубины и ширины, причём движение частиц невелико. Покажите, что квадрат периода волн равен

$$\frac{\frac{4\pi k}{2\pi\lambda e\lambda + 1}}{g\frac{4\pi k}{e\lambda - 1}},$$

где k – глубина канала, λ – длина волны, g – сила тяжести.

Экзамен в Сенат-Хаусе.
Пятница, 3 янв. 1845 г. 9.00 – 11.30

1. Определите составной коэффициент.

Равноугольные параллелограммы относятся друг к другу с коэффициентом, который состоит из коэффициентов их сторон.

2. Проведите прямую линию, перпендикулярную плоскости, из заданной точки над ней.

α. Покажите, как найти число положительных целых решений $ax + by = c$ где a, b и c - целые числа.

Найдите три простые дроби в арифметической прогрессии, знаменатели которых 6, 9, 18, а сумма $2\frac{2}{3}$.

β. При разложении $(1 + x)^n$, где n – положительное целое число, определите соотношение между любыми двумя последовательными членами $(1 + x)^{-n}$.

Если $\left(\frac{a}{a-x}\right)^n$ разложить на ряд возрастающих степеней x, на каком члене ряд начнёт сходиться, если x меньше, чем a?

5. Нечётное число действительных корней уравнения $f'(x) = 0$ лежит между каждой смежной парой действительных корней $f(x) = 0$.

Когда смогут быть получены все действительные корни $f'(x) = 0$, покажите, как определить число и расположение действительных корней $f(x) = 0$. Пример: $x^4 - 32x + 20 = 0$.

6. Разложите $(\cos \theta)^n$ на ряд косинусов кратких дуг, если n – положительное целое число.

Из результата выведите ряд $(\sin \theta)^n$.

γ. Найдите геометрическое место точки, если из неё проведена пара касательных к эллипсу, а прямая, соединяющая точки касания, проходит через фокус.

δ. Определите природу любого плоского сечения прямого конуса. Если конус прямой, каково наклонение его оси к плоскостям тех сечений, эксцентриситет которых равняется $\frac{1}{\sqrt{2}}$?

ε. Докажите, что уравнение плоскости, проходящей через начало координат, имеет вид $z = Ax + By$. Присвойте геометрическое значение A и B, если оси пересекаются под непрямым углом.

Из данной точки O проведена OP, пересекающая данную плоскость в Q, и прямоугольник, ограниченный OP, OQ, постоянный. Каково геометрическое место P?

10. Дифференцируйте $\frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}$, $\log_x a$, $\tan^{-1}\sqrt{1-x}$

Преобразуйте выражение $\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ в такое, где y – независимая переменная.

11. Если u – функция переменных $y, z, \ldots$, каждая из которых является функцией x, докажите, что

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dx} + \ldots$$

Примените эту теорему, чтобы найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ из уравнения $f(x, y) = 0$.

12. Определите область кривизны и найдите выражения для радиуса кривизны и координат центра кривизны в любой точке плоской кривой в прямоугольной системе координат.

Область кривизны в любой точке параболы, кроме вершины, пересекает ось в двух точках по обе стороны от вершины.

ζ. Исследуйте интегралы

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} \text{ и } \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Проинтегрируйте

$$\frac{dx}{x\sqrt{x+a}},\ \frac{x^3dx}{(x-a^2)},\ \sqrt{a+b\sec^2 x\, dx}$$

η. Найдите дифференциальные коэффициенты объёма тела вращения.

Определите объём тела, образованного вращением кривой $(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2$ вокруг оси x, если a больше, чем b. Покажите, каким станет результат, если a равно b.

ЗАДАЧИ
Сенат-Хаус, пятница, 3 янв. 1845 г. 1.00 – 4.00 дня

1. Разделите окружность на две части таким образом, чтобы угол, который содержится в одном сегменте, был в два раза больше угла, который содержится во втором.

2. Если S1 представляет собой ряд $1^r + 2^r + 3^r + \ldots + (p-1)^r$, и a1, a2 … являются коэффициентами $x\ x^2 \ldots$ при разложении $(1+x)^{n+1}$,

$$p\,(p^n - 1) = a1S1 + a2S2 + \ldots + a2S(n\text{-}1) + a2Sn.$$

3. Хорда (PSP) проведена через фокус (S) эллипса, а точки (P, P′) соединены со вторым фокусом (H). Определите условие, при котором площадь (PHP′) будет максимальной. Покажите, что такая задача возможна всегда.

4. Две частицы движутся в разных плоскостях вокруг центра, который притягивает их с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния, одна по кругу, другая по эллипсу. Их орбиты имеют две общие точки, и в каждой из этих точек скорость одной частицы относится к скорости другой как n к единице. Найдите эксцентриситет эллипса.

5. У близорукого человека имеется вогнутая линза недостаточной силы. Покажите, что он может увеличить её силу, слегка наклоняя линзу к линии, соединяющей его глаз и удалённый объект.

6. На параболе, уравнение которой $y^2=lx$, ординаты трёх точек, нормали которых проходят через одну точку, равны y_1, y_2, y_3. Докажите, что

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0,$$

и что окружность, проведенная через эти точки, проходит через вершину параболы.

7. На столе лежит колода карт; каждая выступает над той картой, которая находится под ней, в направлении длины колоды. Если каждая выступает максимально далеко, докажите, что расстояния между краями карт, лежащих последовательно, образуют гармоническую прогрессию.

8. Очень маленький брусок вещества может двигаться вокруг одного конца, который закреплён посередине между двумя центрами сил, притягивающих его обратно пропорционально квадрату расстояния. Если l – длина бруска, а 2a – расстояние между центрами сил, докажите, что для бруска существуют два или четыре положения равновесия, в зависимости от того, превышает ли отношение абсолютной интенсивности большей силы к меньшей $\frac{a+2l}{a-2l}$; охарактеризуйте устойчивые и неустойчивые положения.

9. Частица находится на поверхности эллипсоида, в центре которого имеется притягивающая сила, определите направление, в котором начнёт двигаться частица.

10. Плоскость, начерченная в соответствии с некоторым заданным законом, пересекает эллипсоид. Найдите геометрическое место вершины конуса, который касается эллипсоида на кривой пересечения.

Если a, b и c – полуоси эллипсоида, $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1$ – уравнение секущей плоскости, где α, β и γ находятся в отношении $\frac{a^4}{\alpha^2} + \frac{b^4}{\beta^2} + \frac{c^4}{\gamma^2}$ = constant, геометрическое место точек будет сферой.

11. Пересекающиеся сфера и эллипсоид описаны вокруг одного и того же центра. Докажите, что произведение площадей наибольшего и наименьшего сечений эллипсоида, образованных плоскостями, проходящими через центр и любую точку на линии пересечения двух поверхностей, будет постоянным.

12. Найдите уравнение совокупности спиралей со следующим свойством: отношение двух любых радиус-векторов, образующих прямые углы друг к другу, является постоянным.

Покажите, что $r = a \cos 4\theta \cdot e\ \theta$ – уравнение такой спирали, начертите её.

13. Если F $(x, \frac{1}{x})$ – любая симметричная функция x и $\frac{1}{x}$, тогда $\int_0^8 \frac{dx}{x.F\,(x,\frac{1}{x})} = 2\int_0^1 \frac{dx}{x.F\,(x,\frac{1}{x})}$

14. Гладкая треугольная доска ABC, где угол C тупой, закреплена в вертикальной плоскости, а сторона AB покоится на горизонтальной плоскости; груз скатывается по стороне CA; доска внезапно становится не закреплена; сравните давление груза на доску перед и после начала движения.

15. Докажите, что

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \cos(\sin\theta)\, d^{\theta} = 2\,\pi,$$

и что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-c}}{1-c\, cos^{m\theta}} \cdot d^{\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{2m}},$$

если с бесконечно приближается к 1, m – положительное число.

16. Два одинаковых тяжёлых мяча (А и В) подвешены следующим образом: мяч (А) на тонкой нити из фиксированной точки, а мяч (В) с самой нижней точки мяча (А) на другой тонкой нити той же длины, что и первая. По мячу (В) наносится слабый горизонтальный удар. Определите движение.

17. Гладкий приплюснутый сфероид, центр которого находится в фиксированном положении, равномерно вращающийся вокруг оси симметрии, получает обычный удар; определите его последующее движение и покажите, что мгновенная ось вращения всегда будет лежать на поверхности прямого конуса.

18. Имея следующие приблизительные данные

Для дождевой воды $cos^{-1}\sqrt{\frac{\mu^2-1}{15}} = 76°.\,40'$;

и $cos^{-1}\frac{4}{\mu}\sqrt{\frac{\mu^2-1}{15}} = 46°.\,40'$;

наклон эклиптики $23°.\,30'$;

широта Лондона $51°.\,30'$,

покажите, что на широте Лондона никакая часть третичной радуги не может быть видима для наблюдателя, который повёрнут спиной к солнцу, если солнце отстоит от точки летнего солнцестояния на угол, больший, чем тот, который находится уравнением sec θ=2 cos 11°. 30'.

19. Луч света исходит из центра эллипсоида, внутренняя поверхность которого отполирована и который описывается уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. Докажите, что уравнения отражённого луча будут

$$\frac{x_{\prime}-x}{x\,(2\frac{p^2}{a^2}-1)} = \frac{y_{\prime}-y}{y\,(2\frac{p^2}{b^2}-1)} = \frac{z_{\prime}-z}{z\,(2\frac{p^2}{c^2}-1)},$$

где x, y, z – координаты точек падения, а $\frac{1}{p^2}=\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}$.

20. Учитывая результат предшествующего уравнения, докажите, что все лучи, которые после отражения проходят через линию $x = y = z$, до отражения находились на поверхности конуса, который описывается уравнением

$$yz(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}) + zx(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}) + xy(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}) = 0$$

21. Найдите геометрическое место точек уравнения

$$\frac{y}{b} = \int_0^{\pi} log\,\{1-2\cos\theta\, e^{-sin\,\frac{x}{a}} + e^{-2sin\,\frac{x}{a}}\}d\theta$$

22. Колебания упругой среды описываются уравнениями

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c} = F(vt - lx - my - nz),$$

где $x + \alpha$, $y + \beta$, $z + \gamma$ – координаты в момент времени t молекулы, координаты которой в состоянии покоя x, y, z, а a, b, c – некоторые константы. Колебания будут поперечными к направлению распространения, если

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = 0$$

23. Две трубы, закрытые с одного конца и открытые с другого, одна из которых немного длиннее другой, но совершенно одинаковые во всех других отношениях, лежат бок о бок. Из них извлекли звук основной частоты. Докажите, что результирующая будет варьировать от тишины до громкости, в два раза большей, чем у каждой из труб, звучащей по отдельности, а интервал между двумя последовательными периодами тишины будет $\frac{2}{a}\ \frac{ll'}{l' - 1}$, где a – скорость звука, а l и l' - длины труб. Можно принять, что тип воздушных колебаний с $\sin\frac{2\pi}{\lambda}(at - x)$.

24. Если горизонтальную магнитную силу Земли в любой точке на её поверхности разложить на две, X – в направлении географического меридиана, и Y – перпендикулярно к нему, и X в общем будет задан как функция широты и долготы, тогда Y может быть полностью определён. Но если задан Y, то та же теорема не может быть доказана для X.

Это работа, в которой Старший Рэнглер (Senior Wrangler) сделал девятнадцать задач.

Экзамен в Сенат-Хаусе.
Суббота, 4 янв. 1845 г. 9.00 – 11.30

1. Толщина плосковыпуклой линзы составляет одну пятую дюйма, а её ширина два дюйма, найдите радиус её сферической поверхности.

2. Радиус окружности, которая касается гиперболы и её асимптот, равен той части полученного фокального параметра, который лежит между кривой и асимптотой.

3. Два человека A и B идут навстречу друг другу от концов линии AB. Третий, C, идущий быстрее, чем A и B, начинает движение вместе с A, встречается с B и поворачивает обратно, и так до тех пор, пока все они не встречаются вместе. Расстояние, которое C проходит в направлении AB, в два раза больше, чем в обратном направлении, и когда все они встретятся, он пройдёт расстояние, равное AB. Покажите, что A, B, C относятся как 1, 2, 3.

4. Если можно описать две окружности так, чтобы они касались друг друга и каждая из них касалась трёх сторон четырёхугольника, одна четвёртая разности сумм противоположных сторон является средним пропорциональным между радиусами.

Выразите площадь четырёхугольника через стороны и радиусы окружностей.

5. Плоское зеркало, которое может вращаться вокруг своей оси в плоскости, параллельной оси Земли, движется с востока на запад на половину видимого дневного перемещения Солнца. Покажите, что направление отражённых солнечных лучей в течение дня ощутимо не изменится.

6. Тонкая упругая верёвка обвязана вокруг двух одинаковых цилиндров, поверхности которых соприкасаются, а оси параллельны. Верёвка не растянута больше своей естественной длины. Один из цилиндров дважды поворачивают под прямым углом, так что оси опять становятся параллельны. Найдите натяжение верёвки, если груз в один фунт растянул бы её

до длины, в два раза больше естественной.

7. Однородная сфера, которая может двигаться вокруг фиксированной точки своей поверхности, покоится, опираясь на наклонную плоскость. Найдите давление на фиксированную точку. Если диаметр, проходящий через фиксированную точку, горизонтальный, покажите, что если плоскость внезапно убрать, давление увеличится или уменьшится в зависимости от того, был ли наклон плоскости большим или меньшим, чем $1\frac{2}{7}$.

8. Перекрестье экваториала разрегулировано. Покажите, как найти расстояние от перекрестья до истинного центра поля путём наблюдения знакомой звезды.

9. В данный день кривые, прочерченные краями теней объектов одинаковой вертикальной высоты, на какой широте они бы ни находились, имеют одинаковую кривизну в полдень.

10. Если F (x) - алгебраический многочлен менее чем в 71 измерениях,

$$\int_b^a \frac{F\ (x)\ dx}{(x-c)^n} = \frac{1}{\underline{|n-1}} \frac{d^{n-1}}{dc^{n-1}} \left\{F(c) log \frac{a-c}{b-c}\right\}$$

11.Найдите такую кривую, что если провести перпендикуляры из двух данных точек к касательной в любой точке, площадь, ограниченная перпендикулярами, касательной и расстоянием между точками, будет максимальной.

$$\left\{F(c) log \frac{a-c}{b-c}\right\}$$

12. Если из любой точки проведены касательные плоскости к поверхности n-ного порядка, все точки соприкосновения будут лежать на поверхности (n— l)-го порядка.

13. Все сегменты поверхности $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, которые находятся на одинаковом расстоянии p от её центра, имеют центры на поверхности, которая описывается уравнением

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) = p^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)$$

4. Восемь центров сил, расположенных по углам куба, притягивают в соответствии с одним и тем же законом и с одинаковой абсолютной интенсивностью, частицу, которая находится очень близко к центру куба. Покажите, что результирующее воздействие проходит через центр куба, если только закон, которому подчиняются силы, не является обратным квадратом расстояния.

15. Некоторое количество одинаковых частиц, притягивающих друг друга прямо пропорционально расстоянию, движутся в параллельных трубах. Если дано положение частиц в начале движения, определите последующее движение каждой. Покажите, что частицы будут симметрично колебаться по отношению к плоскости, перпендикулярной трубам, которая проходит через их центр тяжести в начале движения.

16. Полая сфера, наполненная равными количествами двух несжимаемых жидкостей, которые не смешиваются между собой, равномерно вращается вокруг своего вертикального диаметра, и частицы жидкости находятся в относительном покое. Найдите угловую скорость, если более лёгкая жидкость лишь касается самой нижней точки поверхности сферы.

17. Эллипсоид плавает в состоянии стабильного равновесия в жидкости, плотность которой в два раза превышает его собственную. Сравните время малого колебания по отношению к любой оси плоскости плавучести со временем малого вертикального колебания.

18. Значение определённого интеграла

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\ (1 + n\cos^2\theta)\ d\theta$$

можно найти, каким бы ни было положительное значение n, по формуле

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\ (1 + n\cos^2\theta)\ d\theta = \frac{\pi}{4} \log\ \{\ (1 + n)\ (1 + n_1)\ (1 + n_2)\ \ldots\},$$

где n, n_1, n_2 - величины, связанные уравнением

n

$$r + 1 = \frac{n_r^2}{4(n_r + 1)}$$

Экзамен в Сенат-Хаусе.
Суббота, 4 янв. 1845 г. 1.00 – 4.00 дня

1. Найдите значение $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ до четырёх десятичных знаков.

2. Отношение числа комбинаций 4n предметов, взятых 2n раз, к 2n предметов, взятых n раз, составляет

$$\frac{1.3.5\ldots(4n-1)}{(1.3.5\ldots 2n-1)^2}.$$

α. Монета подбрасывается 20 раз подряд. Какова вероятность того, что орёл выпадет нечётное количество раз?

β. Докажите, что $\left(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta\right)^m = \cos\theta m + \sqrt{-1}\sin\theta m$, является ли m целым или дробным, положительным или отрицательным.

5. Исследуйте положение точки, расстояние которой от любой точки кривой y^2=lx + nx^2 является рациональной функцией абсциссы.

γ. Кратчайшее расстояние между двумя прямыми линиями – это перпендикуляр к обеим.

δ. Прямая и кривая n-ного порядка не могут иметь более чем n общих точек.

Докажите, что каждая прямая, которая касается кривой третьего порядка, должна также её пересекать. В каком случае она будет пересекать её в точке соприкосновения?

8. Докажите, что кривая, уравнение которой $y + x\ log_e\ x = 0$, касается оси y в начале координат, но для достаточно малого положительного значения x лежит дальше от него, чем любая кривая с уравнением $y=ax^n$, которая её касается.

ε. Приведите *(ax+by) (xdy—ydx) (a'x + b'y) dy + (a'' + b''y) dx = 0* к линейному уравнению, и интегрируйте следующие уравнения,

$$xdy + ydx = xyzdz,$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}.$$

10. Опишите телескоп Ньютона с окуляром Рамсдена (Ramsden) и проследите путь пучка лучей от данной точки объекта до глаза.

Покажите, какова должна быть форма плоского зеркала, чтобы терялось как можно меньше света. Если предположить, что наиболее длинный диаметр такого зеркала составляет 2 дюйма, а диаметр зеркала-объектива 8 дюймов, найдите долю каждого падающего пучка света, которая теряется.

ζ. Докажите, что алгебраическое уравнение, не все корни которого являются действительными, должно иметь чётное число иррациональных корней.

η. Когда частица движется под воздействием любых сил в одной плоскости, ускоряющая сила, действующая на неё в момент времени t, равна

$\frac{dv}{dt}$ в направлении касательной,

и $\frac{v^2}{\rho}$ в направлении нормали к описанной траектории, где v – скорость, t – время, а ρ – радиус кривизны.

Примените вышеприведенные выражения, чтобы найти путь частицы вокруг центра сил, изменяющихся прямо пропорционально расстоянию, и найдите, где тангенциальное усилие является наибольшим.

13. Точно опишите феномен колец Ньютона и покажите, как их можно объяснить с помощью теории интерференции. Если кольца возникают между призмой и линзой, и угол падения на вторую поверхность призмы превышает критический, что будет видно? К какому выводу это, казалось бы, приводит в отношении молекулярного влияния стекла на светоносный эфир?

Экзамен в Сенат-Хаусе.
Понедельник, 6 янв. 1845 г. 9.00 – 11.30

1. Определите уравнение диаметра данной системы параллельных хорд в эллипсе. Докажите, что если один диаметр параллелен хордам другого, этот второй диаметр будет также параллелен хордам первого.

2. Даны четыре числа, первые три из них – в геометрической прогрессии, а последние три – в арифметической; сумма первого и последнего равняется 14, а второго и третьего – 12. Найдите эти числа.

α. Покажите, как вычислить три корня кубического уравнения при помощи тригонометрических таблиц, если все корни – действительные числа.

4. Как показать существование сопряжённой точки аналитическим путём? Определите, имеется ли такая точка на кривой, которая описывается уравнением

$$y^2 - 2xy + 2x^2 - x^3 = 0.$$

Найдите геометрическое место точек уравнения $e^{\left(\frac{y}{a}\right)^2} = \sin\left(\frac{x}{a}\right)$

β. Докажите, что рекуррентный ряд можно в общем случае разложить на некоторое число геометрических рядов. Какое исключение есть у этой теоремы?

γ. Покажите, каким образом можно определить при помощи точных наблюдений долготу узлов орбиты и наклонение орбиты планеты.

7. Интегрируйте дифференциальное уравнение в частных производных

$$M\frac{dz}{dx} + N\frac{dz}{dy} = P,$$

где M, N и P – функции от x, y *и* z.

Укажите разницу между полной первообразной и общей первообразной дифференциального уравнения с частной производной первого порядка.

δ. Примените принцип д'Аламбера, чтобы доказать, что общее уравнение динамики

$$\sum m\left\{\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right\}=0,$$

и выведите отсюда шесть уравнений движения твёрдого тела.

Какой постулат задействован при обычном применении принципа д'Аламбера для того, чтобы установить фундаментальное уравнение гидродинамики?

ε. Найдите число колебаний в секунду, которое соответствует основной частоте прямой трубы, открытой с одного конца и закрытой с другого.

Как можно измерить скорость звука в любой газовой среде?

ζ. Исследуйте формулы для определения влияния малой возмущающей силы на колебания простого циклоидального маятника.

Отсюда выведите, что на период колебаний не оказывает ощутимого влияния сопротивление воздуха, если величина сопротивления зависит исключительно от скорости маятника.

11. Докажите, что на любой поверхности второго порядка, у которой есть центр, имеются три основные диаметральные плоскости под прямым углом друг к другу.

Экзамен в Сенат-Хаусе.
Понедельник, 6 янв. 1845 г. 1.00 – 4.00 дня.

1. Положения трёх пунктов A, B и C отмечены на карте, и наблюдатель в D (пункте, который находится в той же горизонтальной плоскости, что A, B и C) определяет углы ADB и BDC. Дайте геометрическое построение для нанесения на карту D.

α. Если p – простое число, и a не делится на p, тогда a^{p-1}имеет форму mp + 1, и показатель самой низкой степени a, имеющий такую форму, будет либо p – 1, либо его делителем.

3. Сумма числа граней любого многогранника и числа его углов превышает число его рёбер на два.

β. Покажите, что

$$\sqrt{r}\sin\frac{v}{2}=\sqrt{a(1-e)}\sin\frac{u}{2},$$
$$\sqrt{r}\cos\frac{v}{2}=\sqrt{a(1-e)}\cos\frac{u}{2},$$

где u – эксцентрическая аномалия планеты, v – истинная аномалия, r – радиус-вектор, a – большая полуось, a e – эксцентриситет орбиты.

5. Докажите теорему Лежандра для решения сферического треугольника, длины сторон которого малы по сравнению с радиусом сферы. Покажите, как применить эту теорему, если даны две стороны и прилежащий угол треугольника.

6. Частица движется по гладкой поверхности, причём на неё не оказывают влияния никакие силы, кроме противодействия поверхности. Определите дифференциальное уравнение её траектории.

7. Докажите, что центры колебания и подвешивания физического маятника - взаимообратные.

γ. Определите, есть ли на земной поверхности места, в которых данное солнечное затмение кажется полным, и, если есть, покажите, как определить их широту и долготу.

δ. Исследуйте влияние на положение узлов орбиты Луны силы, уменьшающей притяжение спутника к планете.

Покажите, как влияет на плоскость орбиты спутника сжатие планеты.

ε. Две выпуклые линзы из одного и того же вещества имеют одинаковую ось. Определите расстояние между ними, чтобы их сочетание образовало ахроматический окуляр для телескопа.

11. Покажите, что при разложении возмущающей функции член, который проходит через все её значения с периодом, почти равным периоду возмущаемой планеты, приведёт к значительному неравенству радиус-вектора.

Экзамен в Сенат-Хаусе.
Вторник, 7 янв. 1845 г. 9.00 – 11.30

1. Преобразуйте $x\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}}+\ y\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dy}}+z\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dz}}+\ldots$ в выражение, где $x,\ \frac{y^2}{x},\ \frac{z^2}{y}$ - независимые переменные.

2. Если известен полный интеграл линейного уравнения

$$\int\left(\frac{d}{dx}\right)=0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..\ (1)$$

покажите, как интегрировать уравнение

$$\int\left(\frac{d}{dx}\right)=\varphi\ (0)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (2);$$

а если коэффициенты уравнения (1) постоянны, и корни уравнения f (u) = 0 равны a_1, a_2 … a_n, докажите, что интеграл от (2) будет

$$\mathrm{y}=e^{a_1\mathrm{x}}\int dx\ e^{(a_2-a_1)\mathrm{x}}\int dx\ e^{(a_3-a_2)\mathrm{x}}\ldots\int dx\ e^{(a_n-a_{n-1})\mathrm{x}}\int dx\ e^{-a_n\mathrm{x}}\ \varphi\ (\mathrm{x}).$$

α. Исследуйте отношение между амплитудами двух эллиптических функций (имеющих одинаковый модуль) и третьей, равной их сумме или разности.

Тело, прикреплённое к фиксированной точке верёвкой, вращается по вертикальному кругу. Найдите дугу, которую оно опишет за четверть часа одного обращения после того, как пройдёт наивысшую точку, если натяжение верёвки в этой точке равно нулю.

4. Докажите, что $y^2=\ ax\ +\ a^2$ и $y\ =\left\{\frac{1}{4}-b-(-1)^x\right\}^2-\frac{x^2}{4}$ являются отдельными решениями одного и того же уравнения в конечных разностях. Отсюда покажите, как каждое из них может быть выведено из другого, в зависимости от того, какой параметр (a или b) рассматривается как переменная.

β. Исходя из уравнений движения Луны, получите точное дифференциальное уравнение для вычисления s – касательной наклонения радиус-вектора Луны к плоскости эклиптики.

Покажите, что интеграл от $\frac{d^2s}{d\theta^2}$ + s = 0 не будет первой аппроксимацией к значению s после нескольких оборотов Луны, и найдите истинную первую аппроксимацию.

γ. Исследуйте закон изменения плотности внутри Земли, если предположить, что она находится в состоянии покоя и давление в любой точке изменяется пропорционально квадрату плотности.

Как определить среднюю плотность Земли?

δ. Докажите следующую формулу для нахождения изменения среднего расстояния возмущаемой орбиты,

$$\frac{da_{\prime}}{dt} = -\frac{2na^2}{\mu}\frac{dR}{d\varepsilon},$$

исходя из того, что аппроксимирующие уравнения

$$\frac{de_{\prime}}{dt} = \frac{na}{\mu e}\frac{dR}{d\pi} \text{ и } \frac{d\pi_{\prime}}{dt} = -\frac{na}{\mu e}\frac{dR}{de},$$

Вычислите неравенство четвёртого порядка долготы возмущаемой планеты, возникающее из следующего члена в развёртывании R,

$$Pe^3e'^2\cos\left\{13\,(\mathrm{nt}+\varepsilon) - 8\,(n't+\varepsilon') - 3\pi - 2\pi'\right\} * .$$

8. Две совершенно одинаковые серии волн обычного белого света равной интенсивности исходят из двух точек A и B, расположенных очень близко друг к другу. Вычислите, каким будет их отображение на достаточно удалённом экране, нормаль к которому пересекает линию AB под прямым углом.

Объясните, как результат этого исследования может быть применён для определения длины волны.

* $\theta = nt + \varepsilon + 2e\sin(nt + \varepsilon - \pi)$ + &c.

Экзамен в Сенат-Хаусе.
Вторник, 7 янв. 1845 г. 1.00 – 4.00 дня.

1. v_a , $v_b, \ldots$ v_c – значения v, соответствующие значениям $a, b, \ldots c$ от x, дают следующую формулу интерполяции

$$v = \frac{(x-b)\ldots(x-c)}{(a-b)\ldots(a-c)}\,v_a + |\,\frac{(x-a)\ldots(x-c)}{(b-a)\ldots(b-c)}\,v_b + \&c.$$

Покажите, что если $v_a = v_b = \cdots v_c$, то значение v по этой формуле не зависит от x.

2. Найдите положение плоскости, по отношению к которому сумма моментов количества движения различных частиц в материальной системе максимальна, причём ни одна из сил в системе не является внешней, и покажите, что это положение постоянно.

Применяя этот результат к Солнечной системе, необходимо ли принимать в расчёт вращение солнца и планет вокруг собственной оси?

α. Если α, α′, β, β′ - величины, для которых верны условия

$\alpha^2 + \alpha'^2 = 1,\ \beta^2 + \beta'^2 = 1,\ \alpha\alpha' + \beta\beta' = 0,$

Тогда

$$\int_0^{2\pi} f\,(\alpha\cos u + \alpha'\sin u, \beta\cos u + \beta\sin u)\,du = \int_0^{2\pi} f\,(\cos u, \sin u)\,du.$$

Что понимается под главным значением определённого интеграла, представленным в неопределимой форме?

4. Пластина исландского шпата ограничена плоскостями, перпендикулярными оси кристалла. Определите разность в задержке фронтов обыкновенных и необыкновенных волн, если свет падает почти в направлении оси. Дайте общее объяснение происхождения цветных колец, которые образуются, когда кристаллическое тело помещается между поляризующей и анализирующей пластинами.

β. Уравнение поверхности почти сферического однородного тела с плотностью ρ

$$r = a\ \{1 + a(y_0 + y_1 + y_2 + \ldots)\},$$

(где a – очень малая величина, y_0, y_1, y_2 … - коэффициенты Лапласа), а V – потенциал притяжения им внешней частицы, расстояние от которой до начала координат равен c, докажите, что

$$V = \frac{4\pi\rho a^3}{3c} + \frac{4\pi\rho a^3}{3c}\left\{y_0 + \frac{y_1}{3}\frac{a}{c} + \frac{y_2}{5}\frac{a_2}{c_2} + \cdots\right\}$$

Отсюда покажите, что если притягиваемая частица находится на поверхности притягивающего тела, выражение $V + 2a\frac{dV}{dc}$ имеет одинаковое значение для всех тел, которые очень мало отличаются по величине от сферы с радиусом a.

6. Исследуйте условие, при котором

$$\int_b^a \varphi\ (x, y, \frac{dx}{dy} \ldots)$$

dx будет максимальным или минимальным.

Покажите, что, какой бы ни была функция y от x, если y и z связаны таким образом, что $\varphi\ (x,\ y,\ \frac{dx}{dy}\ \ldots) = \psi\ (x,\ y,\ \frac{dx}{dy}\ \ldots)$, тогда Aδy = Bδz, где A – выражение, приравненное к нулю, которое формирует условие максимума или минимума для fφdx, а B – соответствующее выражение для fψdx.

γ. Если ρ, ρ′ – два главных радиуса кривизны в любой точке кривой поверхности, а R – радиус кривизны нормального сечения, расположенного под углом α к соответствующему главному сечению, то

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\alpha}{\rho} + \frac{\sin^2\alpha}{\rho'}.$$

δ. Исследуйте уравнение для определения постоянной температуры любой части призмы малого поперечного сечения.

Если два крайние сечения призмы находятся при постоянных температурах, её длина делится на любое количество равных частей, а $v_1\ v_2\ v_3$ … – температуры в точках деления, докажите что $\frac{v_\rho + v_{\rho+2}}{v_{\rho+1}}$ – постоянная величина.